edice aliter – svazek 24

Keith **Devlin**

Problémy pro třetí tisíciletí

Sedm největších nevyřešených otázek matematiky

Přeložil Luboš Pick

Nakladatelství Dokořán a Argo
Praha 2005

Z anglického originálu *The Millenium Problems.*
The Seven Greatest Unsolved Mathematical Puzzles of Our Time
přeložil Luboš Pick.
Odborná revize Jan Obdržálek.

ISBN 80-7363-016-8 (Dokořán)
ISBN 80-7203-739-0 (Argo)

Obsah

Předmluva

V květnu roku 2000 oznámil Clayův matematický ústav (Clay Mathematics Institute, CMI) na veřejném zasedání v Paříži za značného zájmu médií, že vypisuje sedm cen po jednom milionu amerických dolarů za vyřešení každého z otevřených matematických problémů, které mezinárodní komise matematiků označila za sedm nejdůležitějších a nejtěžších problémů současnosti. Zpráva vyvolala značný rozruch a během několika následujících týdnů zájem tisku neopadával. Jako matematik a autor knih a článků pro laickou veřejnost, který se navíc pravidelně objevuje v rozhlase, jsem dostal od různých novinářů a rozhlasových producentů nesčetné množství žádostí o komentář nebo o nějaké informace k této záležitosti. Kromě toho za mnou přišlo několik nakladatelů s nabídkou, abych o celé věci napsal knížku. Byl mezi nimi také Bill Frucht z nakladatelství Basic Books. S Billem jsem se velice spřátelil (a díky svým nakladatelským schopnostem se pro mne stal téměř hrdinou) již během naší společné práce na mé předchozí populární knížce *The Math Gene* (Matematický gen). Možnost další spolupráce s ním jsem si tudíž nenechal ujít a ihned jsem se pustil do netriviálního průzkumu, jenž práce na knize vyžadovala.

O něco později mne prezident Clayova ústavu Arthur Jaffe požádal, abych spolu s dalším popularizátorem matematiky Ianem Stewartem napsal obecný úvod k „Sedmi problémům tisíciletí“ pro oficiální publikaci, kterou připravoval Clayův ústav spolu s Americkou matematickou společností. Když jsem se ujistil, že tyto dvě knížky nebudou v příliš velkém konfliktu, souhlasil jsem. Oficiální publikace CMI je primárně zaměřena na pečlivý, přesný a podrobný popis sedmi problémů, přičemž každý z nich popsal některý ze světových odborníků na dané téma. Vzhledem k tomu, že v sázce byly miliony dolarů, nesl CMI také právní odpovědnost za dostatečně přesnou formulaci každého problému, aby recenzenti mohli posoudit, zda nabídnuté řešení splňuje stanovená kritéria. (Jde totiž o problémy na hony vzdálené dělení mnohočlenů nebo řešení kvadratických rovnic a v některých případech je zapotřebí značného úsilí už jen k tomu, abychom vůbec porozuměli jednotlivým výrazům, vystupujícím v jejich formulaci.) Ian a já jsme byli požádáni, abychom krátkým úvodním popisem jednotlivých problémů učinili knihu o něco přístupnější pro matematiky a užitečnější pro novináře a pro laiky, kteří budou chtít získat informace o problémech z „oficiálního pramene“.

Knížka, kterou držíte v ruce, je docela jiná. Nešlo mi o podrobný popis jednotlivých problémů. Většinu z nich není možné popsat laickým jazykem, dokonce ani jazykem srozumitelným osobám s univerzitním vzděláním matematického charakteru. (Už to by vám mělo o jejich povaze leccos naznačit.) Místo toho jsem se snažil nastínit pozadí každého z problémů, popsat, jak a proč vznikly, vysvětlit, čím jsou tak obtížné, a přimět čtenáře, aby pochopil, proč je matematici považují za důležité.

Oficiální publikace CMI vlastně začíná tam, kde má kniha končí. Každý, kdo by rád zkusil některý z Clayových problémů vyřešit, by si měl nejprve přečíst jeho podrobný popis v knize CMI. (Kdo nepochopí výklad v knize, nemá šanci problém vyřešit. Soutěž o ceny tisíciletí je něco jako

Stanleyův pohár: není to záležitost pro amatéry.) Tuto knihu jsem nepsal pro ty, kteří se budou chtít s některým z problémů utkat. Psal jsem ji pro čtenáře, matematiky i nematematiky, které zajímá současný stav poznatků nejstarší lidské vědy a rádi by věděli, kam se posunula hranice našeho matematického poznání po třech tisíciletích intelektuálního vývoje.

Veškerá teoretická výbava, kterou potřebujete ke čtení této knihy, je rozumná znalost středoškolské matematiky. Sama o sobě vám ale stačit nebude. Budete navíc potřebovat přiměřený zájem o věc. Tento druhý nezbytný předpoklad je důležitější než ten předchozí. Od samého začátku mi bylo jasné, že ať se budu snažit jakkoli, nebude možné, aby se kniha četla snadno. Problémy tisíciletí představují nejtěžší a nejdůležitější dosud nezodpovězené matematické otázky, které po mnoho let odolávaly nejlepším mozkům světa při mnohých pokusech o řešení. Už jenom dosáhnout toho, aby laik pochopil, oč vlastně jde, vyžaduje značné úsilí. Jsem nicméně názoru, že toto úsilí stojí za to. Nejsou snad všechny vrcholné úspěchy lidstva zajímavé?

Díky přízni osudu máte ještě jednu možnost, jak se o problémech tisíciletí něco dozvědět. V rámci úsilí, které CMI vynaložil na propagaci soutěže, jsem spolu s Arthurem Jaffem a televizním producentem Davidem Sternem pracoval na dvacetiminutovém televizním filmu, jenž přináší úvodní popis problémů – stejný jako ten, který jsme spolu s Ianem připravili pro publikaci CMI. Tento film můžete zhlédnout na domovských stránkách CMI na adrese www.claymath.org (kde také najdete technický popis jednotlivých problémů napsaný příslušnými odborníky).

Příspěvek do publikace CMI i práce na videu mi při psaní této knihy pochopitelně pomohly. Rád bych poděkoval Arthurovi Jaffemu a Davidovi Ellwoodovi z CMI za mnoho užitečných rozhovorů. Spolupráce s Ianem Stewartem na úvodních pasážích publikace CMI měla také svůj vliv. Veškerá zodpovědnost za knihu, kterou máte před sebou, je ale v konečném účtování samozřejmě jen a jen na mně, a všechny výčitky za různé chyby a všelijaká opominutí posílejte na moji adresu.

Dovolte mi též vyjádřit poděkování Billu Fruchtovi, jenž mi především pomohl dát tento projekt dohromady a potom se se mnou musel potýkat a bojovat, aby výsledná kniha byla co možná nejpřístupnější a nejzajímavější navzdory nevyzpytatelné povaze většiny materiálu, s nímž jsme pracovali. Děkuji také svým agentům, Dianě Finchové z New Yorku a Billu Hamptonovi z Londýna, za neustálé přesvědčování všech světových nakladatelů o tom, že tam venku skutečně žijí lidé, které fascinuje činnost onoho (většinou) tichého a skromného společenství, ke kterému mám čest náležet, společenství hledačů té jediné stoprocentní jistoty a věčné pravdy, kterou máme: matematiky.

Keith Devlin
Palo Alto, Kalifornie
březen 2002

Kapitola 0

Kostky jsou vrženy

Zvědavost patří k lidské povaze. Tradiční náboženství již bohužel neposkytují odpovědi, které by uspokojily naši touhu po jistotě a pravdě. Právě tato potřeba je hnacím motorem matematiky, právě ona dokáže přimět lidi, aby matematice zasvětili svůj život. To, co žene matematika kupředu, je touha po pravdě. Je to také odpověď na krásu a eleganci matematiky.
Landon Clay,
patron a mecenáš Clayových problémů tisíciletí

Dne 24. května roku 2000 oznámili v přednáškové síni univerzity Collège de France v Paříži dva přední světoví matematikové, sir Michael Atiyah z Velké Británie a John Tate z USA, že bude vyplacen jeden milion amerických dolarů osobě nebo osobám, která nebo které jako první vyřeší kterýkoli ze sedmi nejtěžších otevřených matematických problémů. Tyto problémy, jak řekli, budou od nynějška nazývány „problémy tisíciletí“.

Sedm milionů dolarů, tedy jeden milion za každý problém, poskytl zámožný americký majitel investičních fondů a obdivovatel matematiky, pan Landon Clay. Rok předtím založil ve svém domovském městě Cambridge ve státě Massachusetts Clayův matematický ústav (CMI), neziskovou organizaci zaměřenou na propagaci a podporu matematického výzkumu. CMI zorganizoval pařížské zasedání a vzal si na starost organizaci soutěže o ceny tisíciletí.

Sedm problémů vybírala po několik měsíců malá skupina mezinárodně uznávaných matematiků, zvolených vědeckou radou CMI pod vedením zakládajícího ředitele CMI, doktora Arthura Jaffeho. Jaffe byl dříve prezidentem Americké matematické společnosti a dnes zastává místo profesora matematiky na Harvardově univerzitě, které sponzoruje Clay. Komise se shodla na tom, že vybrané problémy představují nejzávažnější dosud nezodpovězené matematické otázky. Většina matematiků s tím bude souhlasit. Tyto problémy jsou středem pozornosti hlavních matematických disciplín a zatím úspěšně odolávají jakýmkoli pokusům o zdolání nejlepšími světovými matematiky.

Jedním z expertů, kteří seznam problémů sestavovali, byl sir Andrew Wiles, který před šesti lety dokázal velkou Fermatovu větu. To, že se tuto větu podařilo dokázat, byl nepochybně jediný důvod, proč se tento 330 let starý rébus na seznam nedostal. Kromě Jaffeho byli dalšími odborníky Michael Atiyah a John Tate, kteří měli v Paříži již zmíněnou přednášku, dále Alain Connes z Francie a Edward Witten ze Spojených států.

Landon Clay, jakkoli je to zvláštní, není matematikem – na Harvardu vystudoval angličtinu. Přesto na své alma mater financuje místo profesora matematiky, sponzoruje Clayův matematický ústav (jehož kapitál v současné době činí 90 milionů dolarů), a nyní tedy navíc ještě také problémy tisíciletí. Tyto své aktivity vysvětluje zčásti jako reakci na to, že se tak důležitému oboru, jakým je matematika, dostává tak chabé finanční podpory ze strany veřejnosti. Nabídkou vysoké peněžní částky a pozváním světového tisku na setkání, na kterém byla soutěž vyhlášena, zajistil Clay pozornost mezinárodních médií nejen problémům tisíciletí, ale matematice samotné. Ale proč s tím cestoval až do Paříže?

Odpověď najdeme v historii. Přesně před sto lety, v roce

1900, se v Paříži u příležitosti druhého světového kongresu matematiků konala podobná akce. Dne 8. srpna 1900 pronesl německý matematik David Hilbert, tehdy vůdčí osobnost světové matematiky, hlavní zvanou přednášku, během níž nastínil osnovu matematiky dvacátého století. Do své přednášky zařadil seznam dvaceti tří problémů, které považoval za nejdůležitější dosud nevyřešené otázky matematiky. Tyto „Hilbertovy problémy", jak se jim později začalo říkat, pak jako majáky ukazovaly matematikům cestu kupředu.

Několik problémů se ukázalo být mnohem jednodušších, než se Hilbert domníval, a ty byly brzy vyřešeny. Některé další byly formulovány příliš nepřesně, takže na ně neexistuje jednoznačná odpověď. Většinou se z nich ale vyklubaly nesmírně obtížné matematické otázky. Kdokoli vyřešil některý z „pravých" Hilbertových problémů, získal si tím okamžitě mezi matematiky slávu, svým významem zcela srovnatelnou s proslulostí nositelů Nobelovy ceny – ovšem s tou výhodou, že nemusel (všichni řešitelé byli muži) čekat mnoho let, než bude jeho úspěch patřičně ohodnocen. Pocty se dostavily ihned, jakmile matematická komunita přijala řešení za správné.

V roce 2000 již byly vyřešeny všechny Hilbertovy problémy až na jeden, a pro matematiky zase jednou nastal čas bilancování. Které z nevyřešených otázek by mohly mít koncem druhého milénia cenu zlata, které z nich by byli všichni shodně ochotni nazvat Mount Everestem světové matematiky?

Pařížské setkání bylo částečně pokusem o zopakování historie, ale ne tak docela. Jak poznamenal Wiles, vyhlášením soutěže sledoval CMI trochu jiné cíle než Hilbert. „Hilbert chtěl svými problémy vést matematiky kupředu," řekl Wiles. „My se prostě jen snažíme zaznamenat důležité a dosud nevyřešené otázky. V matematice existují zásadní problémy, které jsou sice významné, avšak které by bylo nesmírně obtížné vystihnout jedinou otázkou.“ Jinými slovy, problémy tisíciletí nám možná neposkytnou úplně jasnou představu o tom, kterým směrem se matematika ubírá. Jsou však skvělým ukazatelem toho, kde se právě dnes nacházejí její hranice.

Problémy

Takže co ty problémy tisíciletí vlastně jsou? Stav současné matematiky je takový, že není možné ani jediný z nich rozumně popsat bez patřičné průpravy. Proto také právě nyní čtete knihu a ne jen nějaký článek. V tomto okamžiku vám nicméně mohu alespoň sdělit názvy problémů a pomoci vytvořit základní představu, oč se v nich jedná.

Riemannova hypotéza. Toto je jediný dosud nevyřešený problém z Hilbertova seznamu z roku 1900. Matematikové na celém světě se shodují v tom, že tato obskurně vyhlížející otázka o případných řešeních jisté rovnice je vůbec nejvýznamnějším nevyřešeným problémem současné matematiky.

Otázku položil německý matematik Bernhard Riemann v roce 1859 jako součást pokusu o odpověď na jeden z nejstarších matematických hlavolamů: jaká je struktura prvočísel v rámci přirozených čísel (pokud tedy vůbec nějaká taková struktura existuje)? Kolem roku 350 před naším letopočtem dokázal slavný řecký matematik Eukleides, že posloupnost prvočísel roste nade všechny meze, a tedy jich je nekonečně mnoho. Navíc je z pozorování zřejmé, že se jejich hustota postupně snižuje (procházíme-li vyšší přirozená čísla, prvočísel ubývá). Ale dá se o nich říci něco více? Odpověď, jak uvidíme v kapitole 1, je kladná. Důkaz Riemannovy hypotézy by přispěl k našemu porozumění prvočíslům a způsobu jejich rozložení. To by znamenalo mnohem více než jen uspokojení zvědavosti matematiků: kromě všemožných aplikací v matematice, sahajících daleko za rámec struktury prvočísel, by výsledek nalezl uplatnění také ve fyzice a v moderních komunikačních technologiích.

Yangova-Millsova teorie a hypotéza hmotnostních rozdílů. Hybná síla nových postupů v matematice často vychází z přírodních věd, zejména z fyziky. Díky fyzikálním otázkám kupříkladu vynalezli v sedmnáctém století Isaac Newton a Gottfried Leibniz základy matematické analýzy (kalkulu). Kalkulus způsobil v přírodních vědách revoluci, neboť přinesl vědcům matematicky přesný způsob, jak popsat plynulý pohyb. Ale přestože Newtonovy a Leibnizovy metody v podstatě fungovaly, trvalo dalších 250 let, než se podařilo správně zformalizovat matematické základy kalkulu. Podobná situace nastává dnes i u některých fyzikálních teorií, vyvinutých během posledních asi padesáti let. Druhý z problémů tisíciletí je výzvou matematikům, aby zase jednou po čase srovnali krok s fyzikou.

Yangovy-Millsovy rovnice pocházejí z kvantové fyziky. Před téměř padesáti lety je zformulovali fyzikové Chen-Ning Yang a Robert Mills za účelem popisu všech přírodních sil kromě gravitace. Rovnice fungují skvěle. Prognózy z nich odvozené popisují částice, které byly pozorovány v laboratořích celého světa. Avšak zatímco Yangova-Millsova metoda funguje dobře z praktického hlediska, jako *matematická teorie* nebyla dosud zcela dopracována. Druhý problém tisíciletí požaduje vybudování této chybějící teorie, a to výhradně s použitím matematických axiomů. Matematika by měla potvrdit řadu okolností, které byly vypozorovány v laboratořích. Zejména bude nutno matematicky popsat takzvanou „hypotézu hmotnostních rozdílů“, která se týká předpokládaných řešení Yangových-Millsových rovnic. Tato domněnka, které většina fyziků věří, by vysvětlila, proč mají elektrony hmotnost. Důkaz hypotézy hmotnostních rozdílů by pak byl považován za podstatný krok ve vývoji matematických podkladů pro Yangovu-Millsovu teorii. Pomohl by rovněž fyzikům, kteří také neumějí vysvětlit, proč mají elektrony hmotnost – pouze to vypozorovali.

Problém P versus NP. Toto je jediný z problémů tisíciletí, který se týká počítačů. To možná leckoho překvapí. „Koneckonců," dalo by se namítnout, „nedělá se dnes stejně většina matematiky na počítačích?" Ne, nedělá. Většinu numerických výpočtů sice skutečně provádějí stroje, jenže numerické výpočty představují jen malou a ne právě typickou část matematiky.

Ačkoli se elektronický počítač vylíhl z matematiky (poslední potřebné prvky matematické teorie vznikly ve třicátých letech 20. století, tedy několik let před vznikem prvního počítače), svět výpočtů přišel doposud pouze se dvěma matematickými problémy, které by zasloužily zařadit mezi ty opravdu důležité. Oba se týkají výpočtů jakožto koncepčního procesu, nikoli nějakých specifických výpočetních strojů, to jim ovšem neupírá důležité důsledky i pro opravdové praktické počítání. Jeden z nich zařadil Hilbert do svého seznamu pod číslem 10. V tomto problému šlo o důkaz, že jisté rovnice nelze vyřešit strojem. Problém byl zodpovězen v roce 1970.

Druhý z obou problémů je pozdějšího data. Týká se otázky, s jakou efektivitou mohou počítače řešit problémy. Počítačoví vědci dělí výpočetní úlohy do dvou hlavních kategorií: na úlohy typu P (polynomiální), jež mohou být úspěšně vyřešeny strojem, a na úlohy typu E (exponenciální), jejich vyřešení počítačem by vyžadovalo miliony let strojového času. Bohužel většina důležitých výpočetních úloh vznikajících v průmyslu a v obchodu spadá do kategorie NP, která, jak se zdá, leží někde mezi kategoriemi P a E. Ale je tomu opravdu tak? Není náhodou NP jen převlečená P? Většina odborníků věří, že NP a P nejsou totožné (tedy že se výpočetní úlohy typu NP neshodují s úlohami typu P), avšak ani po třicetiletém úsilí to není nikdo schopen rozhodnout. Kladná odpověď by našla významné aplikace v průmyslu, obchodě a elektronických komunikačních prostředcích včetně světové sítě www.

Navierovy-Stokesovy rovnice. Navierovy-Stokesovy rovnice popisují pohyb kapalin a plynů (např. vody kolem lodního trupu nebo vzduchu kolem křídla letadla). Patří do kategorie parciálních diferenciálních rovnic. Studenti přírodních věd a technických oborů na univerzitách se běžně učí řešit parciální diferenciální rovnice a Navierovy-Stokesovy rovnice vypadají, jako by byly vystřiženy ze sbírky příkladů v učebnici analýzy. Jenomže zdání klame. Dosud nikdo nemá ponětí, jak najít jejich řešení, dokonce ani zda nějaké řešení vůbec existuje.

Tento nedostatek nezabránil lodním či leteckým inženýrům, aby konstruovali mohutné lodě nebo aby stavěli stále dokonalejší letadla. Přestože neexistuje obecná formulka pro řešení rovnic, která by fungovala stejně spolehlivě jako například vzorec pro řešení kvadratické rovnice, využívají inženýři pracující na návrzích vysoce výkonných lodí a letadel s úspěchem počítačů k nalezení alespoň přibližných řešení. Stejně jako Yangův-Millsův problém představují Navierovy-Stokesovy rovnice další situaci, kdy matematika musí dohánět to, co odborníci v jiných oborech, v tomto případě ve strojírenství, již provádějí dávno.

Zmínka o „dohánění jiných oborů“ by mohla vyvolat dojem, že některé problémy nemají význam pro nic jiného než pro ego matematiků, kteří prostě nechtějí zůstat pozadu. Taková představa by ovšem znamenala hluboké neporozumění způsobu, jakým se vyvíjí vědecké poznání. Vzhledem k abstraktní povaze matematiky znamená matematický popis nějakého jevu jeho obecně nejhlubší a zároveň nejspolehlivější pochopení. A čím hlouběji něčemu rozumíme, tím lépe to můžeme využít. Stejně jako by důkaz hypotézy hmotnostních rozdílů představoval zásadní posun ve fyzice, také řešení Navierových-Stokesových rovnic by skoro zaručeně vedlo k pokroku v lodním a leteckém strojírenství.

Poincarého domněnka. Tento problém, který poprvé formuloval téměř před sto lety francouzský matematik Henri Poincaré, vychází ze zdánlivě snadné otázky: jak rozeznat jablko od pneumatiky? Uznávám, že takto formulována tato otázka nezní jako problém, který by stál za milion dolarů. Poincaré však požadoval *přesnou matematickou* odpověď, jež by se dala využít v obecnějších situacích, a to právě činí tuto otázku tak těžkou. Tím je vyloučena řada snadno se nabízejících řešení (jako například do obojího kousnout). Sám Poincaré svou otázku zodpověděl takto: jestliže natáhneme gumičku okolo jablka, pak ji můžeme pomalým pohybem stáhnout do jediného bodu, aniž bychom ji trhali nebo jí dovolili opustit povrch jablka. Na druhé straně, natáhneme-li nějakým vhodným způsobem stejnou gumičku na pneumatiku, pak neexistuje žádný způsob, jak ji stáhnout do bodu, aniž bychom roztrhli jedno nebo druhé. Jenomže, kupodivu, zeptáme-li se, zda je možné použít analogickou úvahu se smršťující se gumičkou na čtyřrozměrná jablka a čtyřrozměrné pneumatiky (a o to vlastně Poincarému ve skutečnosti šlo), tu náhle nikdo není schopen poskytnout odpověď. Poincarého domněnka říká, že gumičkovou metodou *je možné* identifikovat čtyřrozměrná jablka.

Tento problém leží v samotném srdci topologie, jedné z nejúžasnějších oblastí současné matematiky. Vedle svého neodmyslitelného a občas bizarního kouzla – topologie kupříkladu buduje hluboké stěžejní teorie, z nichž vyplývá, že mezi pneumatikou a šálkem kávy není žádný zásadní rozdíl – má aplikace v mnoha odvětvích matematiky. Důsledky pokroku v topologii se navíc projevují například v designu, ve výrobě křemíkových čipů a dalších elektronických zařízení, v dopravě, ve výzkumu lidského mozku či dokonce ve filmovém průmyslu.

Birchova a Swinnerton-Dyerova domněnka. Tento problém, podobně jako Riemannova hypotéza, nás zavádí zpět do hájemství obecné matematiky. Od dob starověkého Řecka zápasí matematici s problémem popsat všechna celočíselná řešení rovnic typu

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Tuto speciální rovnici beze zbytku vyřešil Eukleides – přesněji řečeno našel vzorec, který dává všechna její řešení. V roce 1994 dokázal Andrew Wiles, že pro žádnou mocninu vyšší než 2 nemá rovnice

$$x^n + y^n = z^n$$

žádná nenulová celočíselná řešení. (Tento výsledek vešel ve známost jako velká Fermatova věta.) Avšak pro složitější rovnice může být velice obtížné určit, zda mají řešení nebo ne, a pokud ano, pak která to jsou. Birchova a Swinnerton-Dyerova domněnka vypovídá o možných řešeních rovnic v některých těchto komplikovanějších případech.

Stejně jako v případě Riemannovy hypotézy, což je příbuzná otázka, by řešení přispělo k našim celkovým vědomostem o prvočíslech. Není jasné, zda by také našlo aplikace srovnatelného významu za hranicemi matematiky. Není zcela vyloučeno, že důkaz Birchovy a Swinnerton-Dyerovy domněnky by měl význam pouze pro matematiky.

Na druhé straně by ale bylo pošetilé označit tento nebo jiný matematický problém za bezvýznamný pro praktický život. Je třeba přiznat, že matematikové, kteří pracují na abstraktních problémech, jsou mnohdy motivováni spíše vlastní zvědavostí než praktickými důsledky. Připomínám ale znovu a znovu, že všechny významné objevy v čisté matematice vždy našly důležité aplikace v praxi.

Navíc metody, které matematici vyvinou k řešení jistého problému, se často ukazují vhodné k řešení jiných otázek. To byl bezpochyby případ, jakým Andrew Wiles dokázal velkou Fermatovu větu. Obdobně by důkaz Birchovy a Swinnerton-Dyerovy domněnky skoro zaručeně přinesl nové myšlenky, které by později nalezly uplatnění i jinde.

Hodgeova domněnka. Tato otázka je dalším z „chybějících článků" současné topologie. Obecně pojednává o tom, jak složité matematické objekty lze zkonstruovat pomocí jednoduchých. Ve srovnání s ostatními problémy tisíciletí bude mít laický čtenář s porozuměním Hodgeově domněnce asi největší potíže. Ani ne tak proto, že by myšlenky ležící v jejím pozadí byly nesrozumitelnější nebo že by se obecně mělo za to, že by měla být těžší než zbývajících šest problémů. Bude tomu tak spíše z toho důvodu, že jde o velice komplikovanou otázku týkající se technik, které matematika využívá ke klasifikaci určitých druhů abstraktních objektů. Tato otázka vzniká hluboko uvnitř svého oboru na vysoké úrovni abstrakce, a jediný způsob, jak k ní proniknout, je projít všemi vrstvami této narůstající abstrakce. Proto také uvádím tento problém jako poslední.

Cesta k domněnce začíná v první polovině dvacátého století, kdy se v matematice objevily vysoce účinné metody pro vyšetřování tvarů složitých objektů. Základní myšlenkou byla otázka, do jaké míry můžeme aproximovat tvar daného předmětu slepováním jednoduchých geometrických stavebních bloků. To vedlo ke vzniku mocných teoretických nástrojů, s jejichž pomocí bylo možno sestavit katalog mnoha různých druhů objektů. Bohužel zobecňování zašlo za rámec geometrických pramenů této procedury a bylo nutno přidat prvky, které neměly naprosto žádný geometrický význam. Hodgeova domněnka praví, že nicméně pro jednu důležitou třídu objektů (zvaných projektivní algebraické variety) jsou jisté součásti, zvané Hodgeovy cykly, kombinacemi prvků geometrických (zvaných algebraické cykly).

Tak tedy zní problémy milénia – nejdůležitější a nejnáročnější otázky matematiky, na něž na přelomu třetího tisíciletí není známa odpověď. Pokud jste si o nich z mého popisu udělali vůbec nějakou představu, pak nejspíš takovou, že je nesmírně těžké jim porozumět a že jsou dostupné pouze znalcům.

Proč je tak těžké problémům porozumět

Představte si na okamžik, že by Landon Clay vypsal ceny nikoli pro matematiku, ale pro nějakou jinou vědu, řekněme pro fyziku, chemii nebo biologii. K vyložení sedmi nejdůležitějších problémů v některé z těchto disciplín by zcela nepochybně nebylo zapotřebí celé knihy. Nejspíš by stačil tří- nebo čtyřstránkový článek v časopise *Scientific American*. Vskutku, při každoročním udílení Nobelovy ceny často zvládnou noviny a časopisy sdělit čtenáři podstatu vítězného vědeckého výsledku v několika odstavcích.

S matematikou nic podobného obecně provádět nelze. Matematika je jiná. Čím to však je, že se tak odlišuje?

Odpověď lze částečně vyčíst z pozorování, které jako první (jak se alespoň domnívám) učinil americký matematik Ronald Graham, jenž stál po většinu své kariéry v čele matematického výzkumu v Bellových laboratořích, spadajících tehdy pod společnost AT&T. Podle Grahama je matematik jediným druhem vědce, který může oprávněně prohlásit: „Lehnu si na gauč, zavřu oči a pracuji."

Matematika je skoro výhradně cerebrální – vykonaná *práce* se neodehrává v kanceláři nebo v továrně, ale v hlavě. Samozřejmě, tato hlava je připojena k tělu, které se zrovna může nacházet v kanceláři – nebo na gauči – vlastní matematické postupy ale probíhají v hlavě *bez jakéhokoli přímého spojení s fyzickým světem*. Tím nechci říci, že by vědci z jiných oborů nepracovali hlavou. Ale ve fyzice, chemii nebo biologii je předmětem vědcova zájmu obvykle nějaký jev z reálného fyzického světa. I když ani já ani vy nemůžeme vstoupit do vědcovy mysli a zjistit, o čem přemýšlí, přeci jen žijeme ve stejném světě. Tento fakt nás zásadním způsobem spojuje a dává nám základní platformu, jejímž prostřednictvím nám může vědec své úvahy vysvětlit. Dokonce i v případech, kdy se kupříkladu fyzikové snaží porozumět kvarkům nebo kdy biologové zápolí s DNA, dokáže o těchto objektech bez problémů přemýšlet i vědecky netrénovaná mysl, ačkoli s nimi nepřichází denně do styku. Typická umělecká ztvárnění kvarků coby shluků barevných kulečníkových koulí nebo DNA jako točitých schodišť mohou sice v hlubším smyslu být „nesprávná" (a také ve skutečnosti jsou), ale jako ilustrace, které nám umožňují vyvolat v duchu obraz vědy, fungují výborně.

Matematika žádné takové nápomocné propojení s realitou nemá. I v případech, kdy lze načrtnout nějaký obrázek, bude nejspíš ilustrace sice názorná, ale také zavádějící, takže při výkladu je pak třeba nedostatky obrázku nahradit vhodným komentářem. Jak má ale čtenář nematematik takovému komentáři porozumět, když se použitá slova nebudou vztahovat k ničemu, co by znal z každodenní zkušenosti?

Dokonce i pro oddaného příznivce matematiky se tento úkol bude stávat těžším a těžším, jak bude míra abstrakce narůstat a předměty diskuse budou stále vzdálenější od reálného světa. Vskutku, u některých soudobých problémů (a sem patří například právě Hodgeova domněnka) jsme nejspíše dosáhli situace, ve které se nezasvěcená osoba už nemá možnost zapojit. Nejde o to, že lidská mysl potřebuje čas, aby se sžila s pojmy na nové úrovni abstrakce. Tak tomu bylo vždy. Jde spíše o to, že možná hloubka a rychlost růstu abstrakce dosáhly takové úrovně, že už může stačit jen odborník.

Před dvěma a půl tisíci lety dokázal mladý Pythagorův žák, že druhá odmocnina z čísla 2 není racionálním číslem, takže ji není možné vyjádřit pomocí zlomku. To znamená, že soubor čísel, tehdy považovaný za *ten pravý* (tedy celá čísla a zlomky), nestačí ke změření délky přepony pravoúhlého trojúhelníka, jehož obě odvěsny měří shodně jednu délkovou jednotku (z Pythagorovy věty víme, že délka této přepony je právě $\sqrt{2}$ délkových jednotek). Objev znamenal pro pythagorejce takový šok, že se jejich matematický výzkum v podstatě zastavil. Časem nalezli matematici způsob, jak z toho ven: pozměnili svůj přístup k věci a zavedli čísla, která dnes nazýváme čísly reálnými. Řekové považovali za základní systém soubor čísel vycházejících z počítání (tedy „přirozená čísla“) a pro účely měření vzdáleností jej rozšířili na bohatší množinu („racionálních čísel“). Museli tedy uznat podíl dvou přirozených čísel rovněž za číslo. Po zjištění, že racionální čísla na měření vzdáleností nestačí, opustili pozdější matematikové tuto koncepci a prohlásili, že čísla *jsou* prostě body na přímce! To byla zásadní změna a trvalo další dva tisíce let, než se podařilo vypracovat všechny související podrobnosti. Teprve koncem devatenáctého století byla dokončena přesná teorie reálných čísel. Ještě i dnes, navzdory jednoduché představě o reálných číslech jakožto o bodech na přímce, je jejich formální (a vysoce abstraktní) definice postrachem pro vysokoškolské studenty.

Obdobný zápas se vedl kvůli číslům menším než nula. Dnes si představujeme záporná čísla jednoduše jako body ležící nalevo od nuly, jejich zavedení ale matematici odolávali až do poloviny devatenáctého století. Podobný problém představuje pro mnoho lidí myšlenka, že by se měli smířit s komplexními čísly – tedy těmi, která obsahují odmocninu ze záporné hodnoty jako například $i = \sqrt{-1}$ – přestože je k dispozici jednoduchý intuitivní obraz komplexních čísel jakožto bodů v rovině.

V dnešní době pracuje s reálnými, komplexními a zápornými čísly bez problémů dokonce i mnoho nematematiků. A to přesto, že tato čísla představují vysoce abstraktní koncepty a s počítáním (tedy s procesem, díky kterému před nějakými deseti tisíci lety čísla vznikla) mají jen velmi málo společného, a navzdory tomu, že se v našem každodenním životě s žádnými konkrétními příklady iracionálních reálných čísel nebo s číslem obsahujícím odmocninu z -1 nesetkáváme.

V geometrii způsobil v osmnáctém století odborníkům i nematematikům podobné obrovské koncepční potíže objev existence jiných geometrií než té, kterou popsal Eukleides ve své slavné knize Základy. Myšlenka „neeukleidovských geometrií" se dočkala obecného přijetí až v devatenáctém století. Ke smíru došlo bez ohledu na to, že náš každodenní svět je výhradně eukleidovský.

S každým novým koncepčním skokem si museli i matematikové zvykat na nové myšlenky a přijmout je za součást celkového obecného rámce, na jehož základech dělají svou práci. Ještě nedávno byla rychlost pokroku v matematice taková, že zaujatý pozorovatel stačil zažít jednu změnu dříve, než přišla další. To se drasticky změnilo. Abychom porozuměli Riemannově hypotéze (tedy prvnímu problému na seznamu), musíme bezpečně ovládat nejen komplexní čísla (a jejich aritmetiku) a pokročilou matematickou analýzu, ale musíme navíc ještě pochopit, jak sečíst nekonečně mnoho (komplexních) čísel a jak mezi sebou nekonečně mnoho (komplexních) čísel vynásobit.

Takové znalosti jsou dnes již téměř výhradně výsadou těch, kdo vystudovali matematiku na univerzitě. Jen oni mohou vnímat Riemannovu hypotézu jako jednoduché tvrzení, asi tak jako průměrný člověk chápe Pythagorovu větu. V této knize si dáme za úkol nejen vysvětlit, co Riemannova hypotéza říká, ale také vyložit potřebný přípravný materiál. Obvykle jej není možné přiblížit pomocí jevů, které vídáme v každodenním životě, tedy způsobem, jakým postupují fyzikové. Například Brian Greene[1] vysvětluje nejmodernější, nejhlubší a nejvybroušenější teorii vesmíru, tedy teorii superstrun, pomocí jednoduchého názorného obrazu malinkých vibrujících energetických cyklů (což jsou právě ony „struny“). Většina matematických koncepcí však nevychází z každodenních jevů, ale ze starších matematických koncepcí. Takže jediný způsob, jak takové koncepci alespoň povrchně porozumět, znamená pochopit dlouhý řetěz předcházejících abstrakcí.

Měli bychom však neustále mít na paměti, že matematik patří ke stejnému živočišnému druhu jako my všichni (opravdu, věřte mi). Všechny problémy tisíciletí jsou samozřejmě lidské mysli dostupné. Koncepce, které obsahují, a struktury, se kterými pracují, nejsou zas až tak neproniknutelně obtížné, spíše jsou jen velice vzdálené – podobně, jako by připadala starověkým Řekům nepochopitelná a vzdálená myšlenka komplexních čísel nebo neeukleidovských geometrií. Dnes, když jsme si na tyto pojmy zvykli, je nám jasné, že vlastně přirozeně vycházejí z materiálu, který Řekové považovali za běžnou matematiku. Takže možná nejlepší způsob, jak přistupovat k této knize, je považovat sedm problémů za běžnou matematiku pětadvacátého století.

Chcete se stát (právě) milionářem?

Bude mít naděje na výhru milionu dolarů vůbec nějaký opravdový vliv na to, zda bude některý z problémů tisíciletí vyřešen? Pokud otázka stojí tak, zda někdo vyřeší problém proto, aby získal cenu, pak je odpověď záporná. Toto není o nic víc soutěž amatérů než Stanleyův pohár. Chcete-li některý z problémů vyřešit, pak skoro zaručeně musíte mít doktorát z matematiky a budete muset ochotně věnovat spoustu let důkladnému studiu příslušného oboru. To vše za cenu toho, že se ve svém volném čase vzdáte spousty jiných věcí. Jestliže někdo potřebuje k tomu, aby takto nakládal se svým životem, vyhlídku na milion dolarů, pak prostě nemá potřebnou oddanost matematickému výzkumu.

Na druhé straně by ale mohlo sedm cen napomoci pokroku jiným způsobem. Mohly by totiž obrátit pozornost k těmto konkrétním problémům, a tím přilákat mladé matematiky k práci v oborech, z nichž problémy vycházejí. Jedna z těchto osob by pak možná mohla vytrvat a nakonec problém vyřešit. Taková osoba ale nepochybně bude mít větší uspokojení z nalezeného řešení než z finanční odměny. V tomto smyslu se matematikové příliš neliší od olympioniků, kteří si vždy cení více zlatých medailí než lukrativní reklamy a obchodních kontraktů, které jim medaile přinesou.

Matematik se koneckonců zabývá problémy ze stejného důvodu, jaký uvedl slavný britský horolezec George Mallory na novinářovu otázku „Proč chcete zdolat Mount Everest?“: „Protože tam stojí.“ Tuto odpověď můžeme považovat stejně tak za banální jako za hlubokomyslnou. Jestliže reportér skutečně nemohl pochopit, proč by někdo chtěl riskovat svůj život proto, aby vylezl na horu, pak mu pravděpodobně Mallory dal zaslouženě bezobsažnou odpověď. Na druhé straně i bez bůhvíjak hlubokých znalostí povahy člověka je jasné, že Malloryho slova odhalují zásadní rys lidského ducha: naléhavé nutkání objevovat nové světy, běhat rychleji, skákat výše nebo zdolávat větší výšky než kdokoli předtím – případně (neboť příležitostí k takovým výkonům je poměrně málo) alespoň překonat své vlastní osobní rekordy.

Z tohoto důvodu jsou problémy tisíciletí Mount Everestem světové matematiky. Zkuste se zeptat některého matematika, který se po několik let snažil vyřešit některý z těchto problémů, proč tak činí. Odpověď, kterou dostanete, se nebude moc lišit od onoho „protože tam stojí.“

Ačkoli my všichni pochopitelně víme, jak se alespoň domnívám, co to znamená vytknout si určitý cíl, málokdo to dotáhne tak daleko jako špičkový horolezec. Je však jistě snadné pochopit, proč to udělá někdo, kdo na to má. Znám několik lidí, kteří zdolali Everest, a znal jsem jednoho, který na jeho svazích zahynul. Jejich láska a vášeň pro sport byla zkrátka větší, než bývala moje za starých časů, když jsem po víkendech lezl po skalách. Nebyl to záchvat masochismu ani touha po strašlivé smrti, která nutila tyto osoby podstoupit nesmírné útrapy a riskovat život ve snaze vystoupit na vysoké hory, nebo mě v mládí poháněla slézat technicky obtížné stěny útesů. Naopak, byla to obrovská láska k životu, která je k jejich cílům vedla.

V matematice platí totéž. Nejlepší matematici světa, lidé, kteří by byli schopni utkat se s některým z problémů tisíciletí, prostě mají vyšší stupeň oddanosti a vášně pro obor než my ostatní, kterým stačí k intelektuálnímu požitku zápas s méně obtížnou matematickou úlohou. Žádný milovník matematiky, ať je to světový odborník nebo amatér, který řeší matematické problémy o víkendech, nepotřebuje ke snaze o vyřešení těžkého problému jiný důvod než „protože tu je“.

Matematický výzkum je něco jako hledání cesty na vrchol hory. Začneme v údolí, kde jsou stromy a křoví tak husté, že je velmi obtížné jimi projít a nebo vůbec odhadnout, kterým směrem se vydat. (Možná si ten pocit pamatujete z hodin matematiky na střední škole.) Po chvíli bloudění dokola náhle zahlédneme skrz stromy obrys vysokého zasněženého vrcholku strmícího proti obloze. Je to nepopsatelná nádhera. (Bohužel, většina studentů se při hodině matematiky nedostane ani do tohoto stádia. Těch pár, kteří dojdou až sem, většinou neodolají a vylezou až na vrcholek; z těch se pak stanou matematici.) I když víme, kde hora je, je velmi obtížné probojovat se k jejímu úpatí. Děláme chybné obraty, občas se musíme vrátit a nicotnost našeho pokroku nás často znechutí. Ale když vytrváme a dokážeme se i zeptat na cestu, tak najednou zjistíme, že koukáme na vrcholek.

Začínáme stoupat. Jak postupujeme výš a výš, stromy a nízký porost se postupně ztrácejí a jde se stále lépe. (Jak každý profesionální matematik rád potvrdí, vyšší matematika je často mnohem jednodušší než leckterá matematika označovaná za „elementární“.) Na druhé straně postupně řídne vzduch (matematika je stále abstraktnější), čímž se výstup ztěžuje. Navíc čím výš vylezeme, tím nižší je šance, že potkáme nějakého průvodce, který by nám pomohl najít cestu. Nakonec zůstaneme sami. Každé uklouznutí může vést k vážnému pádu. (Jedna malá chyba ve znaménku v rovnici může zničit měsíce následného výzkumu.)

Ale když se dostaneme až na vrcholek, pocit z dosaženého úspěchu je ohromující. Veškeré trápení při výstupu je zapomenuto v okamžiku, kdy se v nás rozlije první pocit triumfu. Výhled je úchvatný. Odtud, z vrcholu hory, vidíme dole cestu, po které jsme přišli, a také všechny své nesprávné kroky. Získáváme také značný přehled o terénu pod námi. Díky tomu to příště budeme mít o něco snazší, až zase budeme jednou stát v údolí a hledat další kopec, na který bychom vylezli. Příště budeme startovat s tím druhem všeobecného povědomí, který lze získat jedině při pohledu z vrcholu hory dolů.

Sedm problémů milénia představuje současný Mount Everest matematiky. Co přesně bude z některého z těchto sedmi vrcholů vidět, se dá těžko říci. Jedno je ale jisté: jestli bude kterýkoli z nich zdolán, tak uvidíme tak daleko, že prostě nebude možné, aby se svět nezměnil. To bude ta pravá cena. Nálepka s jedním milionem dolarů na každém z problémů je jen jakýmsi potvrzením o jejich důležitosti.